Odhad změny rotace Země při změně poloměru

RNDr. Pavel Samohýl

1. Seznam symbolů

A, A_1, A_2	součinitel vztahu pro závislost hustoty Země na vzdálenosti od středu, totéž v minulosti a současnosti
B, B_1, B_2	součinitel vztahu pro závislost hustoty Země na vzdálenosti od středu, totéž v minulosti a současnosti
I, I_1, I_2	moment setrvačnosti, moment setrvačnosti v minulosti, moment setrvačnosti v současnosti
r, ϑ, ϕ	sférické souřadnice
$r`$	vzdálenost od osy rotace
R, R_1, R_2	poloměr Země, poloměr Země v minulosti, poloměr Země v současnosti
ρ, ρ_1, ρ_2	hustota Země, hustota Země v minulosti, hustota Země v současnosti
$\rho_{stř.1}, \rho_{stř.2}$	střední hustota Země v minulosti a současnosti
T_1, T_2	perioda rotace země v minulosti a současnosti
V_2, V_1, V_2	objem Země, objem Země v minulosti, objem Země v současnosti
ω_1, ω_2	úhlová rychlost rotace v minulosti a současnosti

2. Úvod

Hypotéza o rozpínání Země vede ke změně rychlosti její rotace. Cílem tohoto článku je pokus o hrubý odhad změny rychlosti rotace na zjednodušeném modelu rotující koule s radiálním rozložením hustoty. Předpokládejme, že Země by zvětšila svůj obvod o 3000 km. Tato vzdálenost přibližně odpovídá vzdálenosti Jižní Ameriky od Afriky. Tato změna poloměru Země by současné pevniny natolik přiblížila, že by vytvořily víceméně jeden celek.

Výpočet bude proveden na základě následujících vztahů. V případě, že na rotující těleso nepůsobí vnější síly, součin $I\omega$ = const. podle druhé impulsové věty, tedy

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

tedy

$$T_1 = \frac{I_1}{I_2} T_2, \qquad (1)$$

kde I je moment setrvačnosti, ω je úhlová rychlost rotace, T je doba oběhu, index 1 označuje stav v minulosti, index 2 současný stav.

Jeli hustota rotujícího tělesa ρ, potom moment setrvačnosti je dán vztahem (viz [1], vztah 2.5(15)):

$$I = \iiint_V r'^2 \rho \cdot dV \qquad (2)$$

3. Stanovení hustoty

Pro náš model předpokládejme, že Země má tvar koule a **její hustota je proměnná**. Závislost hustoty ρ na vzdálenosti od středu Země r není známa. Střední hustotu Země v současnosti známe [2]:

$$\rho_{stř,2} = 5518 \text{ kg/m}^3 \qquad (3)$$

Povrchovou hustotu Země $\rho(R)$ můžeme odhadnout. Povrch Země je tvořen převážně bazaltem s hustotou 3350 kg/m^3 a křemenem s hustotou 2650 kg/m^3. Pro náš odhad použijeme průměrnou hustotu danou dvěma hmotnostními díly bazaltu a jedním hmotnostním dílem křemene, tedy $\rho(R)$ = 3117 kg/m^3. Jsme si vědomi hrubosti tohoto předpokladu jakož i toho, že rozložení pevnin a oceánů neodpovídá předpokladu radiální rozložení hustoty. Vliv této nejasnosti na závěr ukážeme citlivostním výpočtem s předpokladem bazaltového povrchu (bez vlivu pevnin). Vzhledem k tomu, že máme jen dvě hodnoty hustoty v závislosti na vzdálenosti od středu Země r, můžeme zvolit závislost $\rho(r)$ pouze jako lineární vztahem

$$\rho(r) = A + Br, \qquad (4)$$

kde A, B jsou konstanty.

Střední hustotu můžeme vyčíslit vztahem

$$\rho_{stř.} = \frac{1}{V}\iiint_V \rho \cdot dV., \qquad (5)$$

kde V je objem Země. Integraci provedeme v polárních souřadnicích a dosadíme hustotní závislost (4):

$$\rho_{stř} = \frac{1}{V}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho \cdot r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr = \frac{4\pi}{V}\int_0^R \rho \cdot r^2 dr = \frac{4\pi}{V}\left(\int_0^R Ar^2 dr + \int_0^R Br^3 dr\right)$$

$$\rho_{stř} = \frac{4\pi}{V}\cdot\left(\frac{AR^3}{3} + \frac{BR^4}{4}\right) = A + \frac{3}{4}BR \qquad (6)$$

K určení neznámých konstant A, B použijeme ještě hustotu na zemském povrchu dle (4)

$$\rho(R) = A + BR. \qquad (7)$$

Předpokládáme, že povrchová hustota se v minulosti neměnila:

$$\rho(R_1) = \rho(R_2) = 3117 \text{ kg/m}^3. \qquad (8)$$

Uvažujeme-li poloměr země v minulosti R_1 = 5900000 m, současný R_2 = 6378000 m, potom průměrná hustota vychází

$$\rho_{stř,1} = \frac{R_2^3 \cdot \rho_{stř,2}}{R_1^3} = 6969 \text{ kg/m}^3 \qquad (9)$$

Z rovnic (6), (7) dostaneme pro současné součinitele závislosti hustoty A_2, B_2

$$A_2 = 12722 \text{ kg/m}^3 \qquad (10)$$

$$B_2 = -0{,}00150601 \text{ kg/m}^4 \qquad (11)$$

a v minulosti

$$A_1 = 18525{,}39 \text{ kg/m}^3 \qquad (12)$$

$$B_1 = -0{,}00261 \text{ kg/m}^4. \qquad (13)$$

4. Stanovení momentu setrvačnosti

Do vztahu pro moment setrvačnosti (2) dosadíme vztah pro radiální závislost hustoty (4):

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot (A + Br) \cdot r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi \cdot dr\,, \tag{14}$$

po integraci dostaneme

$$I = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot R^5 \cdot \left(\frac{A}{5} + \frac{BR}{6} \right),$$

potom moment setrvačnosti v současnosti je po dosazení (10), (11)

$$I_2 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot R_2^5 \cdot \left(\frac{A_2}{5} + \frac{B_2 R_2}{6} \right) = 8{,}34235 \times 10^{37}\,\mathrm{kgm}^2\,, \tag{15}$$

a moment setrvačnosti v minulosti je po dosazení (12), (13)

$$I_1 = \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot R_1^5 \cdot \left(\frac{A_1}{5} + \frac{B_1 R_1}{6} \right) = 6{,}8127 \times 10^{37}\,\mathrm{kgm}^2\,. \tag{16}$$

Dosazením (15), (16) do rovnice (1) dostaneme

$$T_1 = \frac{I_1}{I_2} \cdot T_2 = \frac{6{,}8127 \times 10^{37}}{8{,}34235 \times 10^{37}} \times 24 = 19{,}6\ \mathrm{hod}\,. \tag{17}$$

To znamená, že dřívější rok by byl přibližně dlouhý za předpokladu stejné doby oběhu kolem Slunce $\frac{24}{19{,}6} \times 365 = 447$ dnů.

5. Závěr

Pokud by dnešní rozměr Země byl výsledkem zvětšení jejího obvodu o 3000 km, došlo by ke zpomalení doby otočení kolem osy o asi 4,4 hod ve srovnání se stavem, kdy byl její obvod o 3000 km menší.

Tento výsledek je platný za řady omezujících předpokladů a lze ho chápat jako první přiblížení. Radiální závislost hustoty na poloměru musela být zvolena lineární, protože na proložení závislosti máme k disposici pouze dva body, hustotu Země na povrchu a střední hustotu Země. Citlivostní výpočet ukazuje, že nejasnost v povrchové hustotě není příliš dramatická, protože použití povrchové hustoty odpovídající bazaltu způsobí změnu roku na 448 dnů. Předpoklad lineární závislosti hustoty je pochopitelně hrubé přiblížení, protože nemůžeme vyloučit ani diskontinuity v průběhu hustoty. Ovšem rozdíl mezi střední hustotou 5518 kg/m^3 a povrchovou hustotou 3117 kg/m^3 není pravděpodobně tak velký, aby použití

vyššího polynomu způsobilo zcela odlišný výpočet. Navíc na moment setrvačnosti má největší vliv hustota povrchových vrstev.

Uvedené zpomalení je dáno pouze v důsledku změny poloměru rotující koule a nezahrnuje zpomalení, které je způsobeno slapovými silami působícími v systému Země, Měsíc. Uvedený výpočet byl proveden pouze za účelem stanovení ilustrativní hodnoty změny rotace při případné změně poloměru Země. Mechanismus ani rychlost uvažovaných změn poloměru nejsou v tomto článku hodnoceny.

6. Literatura

[1] Z. Horák, F. Krupka: Fyzika, příručka pro vysoké školy technického směru, SNTL, ALFA, Praha 1981

[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, 1980